

2026年普通高等学校招生全国统一考试(I)

数学试题

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单选题:本题共8小题,每小题5分,共40分,每小题只有一个选项符合要求

1. 样本数据 6, 8, 4, 5, 12 的中位数为

- A. 5 B. 6 C. 8 D. 9

2. 已知平面向量 a, b 不共线, 且 $2a + yb = xa - 3b$, 则

- A. $x = 2, y = -3$ B. $x = -2, y = 3$ C. $x = 2, y = 3$ D. $x = -2, y = -3$

3. 已知集合 $A = \left\{ \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right), \tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right\}$, $B = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right\}$ B. $\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right\}$ C. $\left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$ D. $\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right\}$

4. 曲线 $y = 5x + 8\ln x$ 在点 $(1, 5)$ 的切线方程为

- A. $y = 3x + 2$ B. $y = 5x$ C. $y = 8x - 3$ D. $y = 13x - 8$

5. 已知抛物线 $C_1: y^2 = 2p_1x (p_1 > 0)$ 和 $C_2: x^2 = 2p_2y (p_2 > 0)$ 均经过点 $(4, 8)$, 则 C_1 的焦点与 C_2 的焦点之间的距离为

- A. 12 B. $4\sqrt{5}$ C. 6 D. $\frac{\sqrt{65}}{2}$

6. 已知函数 $f(x) = \frac{x+2}{e^x+a}$ 的最大值为 1, 则 $a =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

7. 一百零八塔位于宁夏回族自治区青铜峡市, 以其独特的建筑格局和深远的历史文化闻名遐迩, 该塔群共有 108 座塔, 依山势自上而下排成 12 行, 将第 i 行中塔的座数记为 a_i ($i = 1, 2, \dots, 12$), 其中 $a_1 = 1, a_3 = a_4 = 3, a_6 = a_7 = 5$, 且 $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ 是一个首项为 7, 公差为 2 的等差数列, 将 $a_1, a_2, \dots, a_{12}$ 分为 6 组, 每组 2 个数, 使得每组的 2 个数之和可构成一个项数为 6 且公差为 $d (d > 0)$ 的等差数列, 则 $d =$

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

8. 设 $U = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{-2, -1, 1, 2\}, i=1, 2, 3\}$ 为空间中 64 个点构成的集合, 记 $P = (1, 1, 1)$, 记样本空间 $\Omega = \{U \in \{P\}\}$, 从 Ω 中随机取一个点, 定义随机变量 X 如下: 对 Ω 中的每个点 $A(x_1, x_2, x_3)$, 令 $X(A) = x_1 + x_2 + x_3$, 则 X 的数学期望为

- A. $-\frac{1}{21}$ B. $-\frac{1}{63}$ C. 0 D. $\frac{1}{7}$

二、多选题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分。

9. 设 $z = 3 + 2i$, 则

- A. $\bar{z} = 3 - 2i$ B. $|z| = 5$ C. $z^2 = 5 + 12i$ D. $\frac{z+3}{i-1} \in R$

10. 在空间中, A, B 为两个定点, 动点 C 到直线 AB 的距离为 2, 动点 D 到直线 AB 的距离为 1, 若二面角 $C-AB-D$ 为 60° , 则

- A. $\angle CAD \geq 60^\circ$ B. $CD \geq \sqrt{3}$
C. 当 $AB \perp CD$ 时, $CD \perp$ 平面 ABD D. 当 $AB \perp$ 平面 ACD 时, $AC \perp AD$

11. 已知圆 $C_1: (x+1)^2 + y^2 = 1$, 圆 $C_2: (x-1)^2 + y^2 = 1$, 圆 $C_3: x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$, 直线 $l: y = kx + b$ 与 C_1, C_2, C_3 均有两个交点, 记 l 被 C_1, C_2, C_3 截得的弦长分别为 s_1, s_2, s_3 , 则

- A. k 可以取任意实数 B. 满足 $s_1 = s_2 = s_3$ 的直线 l 共有 3 条
C. 满足 $s_1 + s_2 + s_3 = 1$ 的直线 l 多于 3 条 D. 当 $b = 0$ 时, $s_1 + s_2 + s_3$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分

12. 双曲线 $5x^2 - 6y^2 = 1$ 的离心率为_____.

13. 已知 $f(x) = 2\sin(ax + \theta)$ ($a \in Z, 0 \leq \theta < 2\pi$) 是偶函数, $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递增, 则 $\theta =$

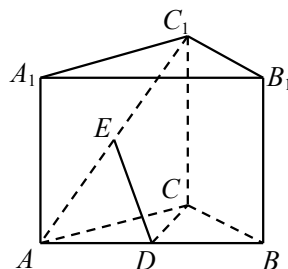
14. 设实数 q 满足: 存在数列 $\{a_n\}$, 使得对于任意 $n \in N^*$, 均有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{3n} = n^2 + n$, 且 $\{a_n\}$ 中有某连续 9 项 $a_k, a_{k+1}, \cdots, a_{k+8}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 q 的最大值为_____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤

15. 如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, D, E 分别为 AB, A_1C_1 的中点.

(1) 证明: $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ;

(2) 设 $CC_1 = 2$, 直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 45° , 求直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离.



16. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3$, $BC = 2\sqrt{3}$, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求 $\cos A$;

(2) 设 D, E 两点满足: D 在 BA 的延长线上, $DE \parallel BC$, $AE \perp AC$. 若 $DE = \sqrt{6}$, 求 CE .

17. 设整数 $N \geq 2$. 某同学用一个球进行投篮练习, 至多投置 N 次, 当且仅当投中 1 次时或 N 次均未投中时, 停止练习. 设该同学每次投中的概率为 p ($0 < p < 1$), 各次投中与否相互独立. 记 X 为停止练习时该同学的投篮次数.

(1) 当 $N = 4$, $p = \frac{1}{3}$ 时, 求 X 的分布列;

(2) 设 k, m 均为自然数.

(i) 当 $k \leq N - 1$ 时, 求 $P(X > k)$;

(ii) 当 $k + m \leq N - 1$ 时, 证明: $P(X > k + m \mid X > k) = P(X > m)$.

18. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-1, 0)$, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设 O 为坐标原点, 过 F 且斜率大于 0 的动直线 l 与 C 交于 P, Q 两点, 其中 Q 在第三象限, 直线 PO 与 C 的另一个交点为 R .

(i) 若 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PFO$ 的面积 3 倍, 求 l 的方程;

(ii) 求 $\tan \angle PQR$ 的最小值.

19. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$. 对任意 $x_0 \in \mathbb{R}$, 定义集合 $D(x_0) = \{d \in \mathbb{R} \mid f(x_0 + d) > f(x_0)\}$.

(1) 若当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 1 - x$, 求 $D(-1)$;

(2) 若 $f(x)$ 是奇函数, $f(x_1) \leq f(x_2)$, 且 $x_1 x_2 \neq 0$, 证明: $D(x_2) \subseteq D(x_1)$;

(3) 设 $f(x)$ 满足: ①若 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则 $D(x_2) \subseteq D(x_1)$; ②当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < f(0)$.

(i) 证明: $f(0) \geq 1$;

(ii) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增.

2026 年普通高等学校全国统一考试
数学试题参考答案及评分建议

一、选择题

1. B 2. A 3. C 4. D 5. D 6. B
7. B 8. A

二、选择题

9. ACD 10. BC 11. BCD

三、填空题

12. $\frac{\sqrt{66}}{6}$ 13. $\frac{3\pi}{2}; 1$ 14. $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$

注：第 13 题答对第一空得 2 分，第二空得 3 分。

四、解答题

15. 解：

(1) 取 CC_1 中点 F ， BC 中点 G ，连接 EF ， FG ， DG 。

在 $\triangle ACC_1$ 中， E ， F 为 AC_1 ， CC_1 中点，所以 $EF \parallel AC$ ， $EF = \frac{1}{2}AC$ 。

在 $\triangle ABC$ 中， D ， G 为 AB ， BC 中点，所以 $DG \parallel AC$ ， $DG = \frac{1}{2}AC$ 。 (2 分)

所以 $EF \parallel DG$ ， $EF = DG$ ，四边形 $EDGF$ 为平行四边形，所以 $DE \parallel FG$ 。

(4 分)

因为 $FG \subset$ 平面 BCC_1B_1 ， $DE \not\subset$ 平面 BCC_1B_1 ，所以 $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 。 (5 分)

(2) 取 AC 中点 H ，连接 DH ， EH 。因为 D ， H 为 AB ， AC 中点，所以 $DH \parallel BC$ 。

因为直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ，所以 $CC_1 \perp$ 平面 ABC 。

因为 $BC \subset$ 平面 ABC ，所以 $CC_1 \perp BC$ 。因为 $\angle ACB = 90^\circ$ ，所以 $AC \perp BC$ 。

因为 $AC \cap CC_1 = C$ ，所以 $BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 ，所以 $DH \perp$ 平面 ACC_1A_1 。

点 D 在平面 ACC_1A_1 的垂足为 H ，直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成角为 45° . (7 分)

在 $\triangle ACC_1$ 中， EH 为中位线，所以 $EF = \frac{1}{2}CC_1 = 1$.

在 $\text{Rt}\triangle DHE$ 中， $DH \perp EH$ ，所以 $DH = EH \tan 45^\circ = 1$.

因为 $BC = 2DH = 1$ ，所以 $AC = BC = 2$. (10 分)

因为 $DE \parallel$ 平面 BCC_1B_1 ，所以直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离等价于点 D 到平面 BCC_1B_1 的距离. 因为 $DG \parallel AC$ ，同理 $AC \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

因为 $DG \not\subset$ 平面 BCC_1B_1 ，所以 $DG \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

所以 $DG = \frac{1}{2}AC = 1$ ，故直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1. (13 分)

16. 解:

(1) 在 $\triangle ABC$ 中， $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B = 9 + 12 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 9$

所以 $AC = 3$. (3 分)

则 $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{9 + 9 - 12}{2 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3}$. (6 分)

(2) 设 $\overrightarrow{AD} = -\lambda \overrightarrow{AB} (\lambda > 0)$. 因为 $DE \parallel BC$ ，设 $\overrightarrow{DE} = \mu \overrightarrow{BC}$.

因为 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = -\lambda \overrightarrow{AB} + \mu(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -(\lambda + \mu)\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. (8 分)

又 $AE \perp AC$ ，所以 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ， $-(\lambda + \mu)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \mu \overrightarrow{AC}^2 = 0$.

因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3 \times \frac{1}{3} = 3$ ， $\overrightarrow{AC}^2 = 9$ ，所以 $-3(\lambda + \mu) + 9\mu = 0$ ， $\lambda = 2\mu$. (11 分)

因为 $\lambda > 0$ ，所以 $\mu > 0$.

因为 $|\overrightarrow{DE}| = \mu |\overrightarrow{BC}|$ ，所以 $\sqrt{6} = 2\sqrt{3}\mu$ ， $\mu = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overrightarrow{AE} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AC}$ ， $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB} + (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)\overrightarrow{AC}$ ， (13 分)

$\overrightarrow{CE}^2 = \frac{9}{2}\overrightarrow{AB}^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)^2\overrightarrow{AC}^2 - 3\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{81}{2} + 9(\frac{3}{2} - \sqrt{2}) - 9\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1) = 45$

$CE = 3\sqrt{5}$. (15 分)

17. 解:

$$(1) X=1, 2, 3, 4 \quad (1 \text{ 分})$$

$$P(X=1)=p=\frac{1}{3},$$

$$P(X=2)=(1-p)p=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9},$$

$$P(X=3)=(1-p)^2p=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27},$$

$$P(X=4)=(1-p)^3p+(1-p)^4=(1-p)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}, \quad (4 \text{ 分})$$

X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

(6 分)

$$(2) (i) X > k \text{ 等价于前 } k \text{ 次投篮均未投中}, \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{则 } P(X > k) = (1-p)^k \quad (9 \text{ 分})$$

$$(ii) \text{ 因为 } m \in \mathbf{N}, \text{ 所以 } \{X > k+m\} \subseteq \{X > k\},$$

$$\text{则 } P(\{X > k+m\} \cap \{X > k\}) = P(X > k+m), \quad (10 \text{ 分})$$

$$P(X > k+m | X > k) = \frac{P(\{X > k+m\} \cap \{X > k\})}{P(X > k)} = \frac{P(X > k+m)}{P(X > k)}. \quad (12 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } k+m \leq N-1, \quad k \leq N-1, \quad m \leq N-1.$$

$$\text{由 (1) 可知 } P(X > k) = (1-p)^k, \quad P(X > m) = (1-p)^m, \quad P(X > k+m) = (1-p)^{k+m},$$

$$\text{所以 } P(X > k+m | X > k) = \frac{P(X > k+m)}{P(X > k)} = \frac{(1-p)^{k+m}}{(1-p)^k} = (1-p)^m = P(X > m), \text{ 得证.}$$

(15 分)

18. 解:

$$(1) \text{ 由题意得, } c=1, \quad e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}, \text{ 所以 } a=2. \quad (2 \text{ 分})$$

又 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$ ，所以 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. (3 分)

(2) 设 $l: y = k(x+1) (k > 0)$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$.

联立 $\begin{cases} y = k(x+1) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 消 y 得 $(3+4k^2)x^2 + 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$.

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = \frac{-8k^2}{3+4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2}$. 由对称性知 $R(-x_1, -y_1)$.

(5 分)

(i) 由题意易知 $S_{\triangle PQR} = 2S_{\triangle PQO}$, $S_{\triangle PQO} = S_{\triangle PFO} + S_{\triangle QFO} = \frac{1}{2}|y_1| + \frac{1}{2}|y_2|$.

因为 $k > 0$, 点 Q 在第三象限, 所以 $x_2 < -1$, $y_2 < 0$.

又 $x_1 > x_2$, $y_1 > 0$, 所以 $S_{\triangle PQO} = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$, $S_{\triangle PQR} = y_1 - y_2$.

因为 $S_{\triangle PQR} = 3S_{\triangle PFO}$, 所以 $y_1 - y_2 = \frac{3}{2}y_1$, $y_1 = -2y_2$, (7 分)

$k(x_1+1) = -2k(x_2+1)$, 则 $x_1 = -2x_2 - 3$.

由 $x_1 + x_2 = \frac{-8k^2}{3+4k^2}$, 则 $-x_2 - 3 = \frac{-8k^2}{3+4k^2}$, $x_2 = \frac{-9-4k^2}{3+4k^2}$, $x_1 = \frac{9-4k^2}{3+4k^2}$.

由 $x_1x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2}$, 则 $\frac{16k^4-81}{(3+4k^2)^2} = \frac{4k^2-12}{3+4k^2}$, $16k^4-81 = 16k^4-36k^2-36$, $36k^2 = 45$,

解得 $k = \frac{\sqrt{5}}{2}$. 故 $l: \sqrt{5}x - 2y + \sqrt{5} = 0$. (10 分)

(ii) 设直线 l 的斜率为 k , 易知 $k_{PQ} = k$,

$k_{QR} = \frac{y_2 - (-y_1)}{x_2 - (-x_1)} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{k(x_1+1) + k(x_2+1)}{x_1 + x_2} = k(1 + \frac{2}{x_1 + x_2}) = k[1 + \frac{2(3+4k^2)}{-8k^2}] = -\frac{3}{4k}$ (13 分)

故 $\tan \angle PQR = \left| \frac{k_{PQ} - k_{QR}}{1 + k_{PQ}k_{QR}} \right| = \left| \frac{k + \frac{3}{4k}}{1 - \frac{3}{4}} \right| = 4(k + \frac{3}{4k})$. (15 分)

因为 $k > 0$, 所以 $\tan \angle PQR = 4(k + \frac{3}{4k}) \geq 4 \cdot 2\sqrt{k \cdot \frac{3}{4k}} = 4\sqrt{3}$ (当且仅当 $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取等).

故 $\tan \angle PQR$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$. (17 分)

19. 解:

$$(1) f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}, \text{ 因为 } D(-1) = \{d \in \mathbf{R} \mid f(-1+d) > \frac{1}{2}\}, \text{ 令 } t = -1+d, \text{ 解 } f(t) > \frac{1}{2}. \quad (1 \text{ 分})$$

若 $t < 0$ 时, $f(t) = 2^t$, $2^t > \frac{1}{2} = 2^{-1}$. 易知 $y = 2^x$ 单调递增, 故 $t > -1$, 则 $-1 < t < 0$;

若 $t \geq 0$ 时, $f(t) = 1-t$, 则 $1-t > \frac{1}{2}$, 解得 $t < \frac{1}{2}$, 则 $0 \leq t < \frac{1}{2}$. (2 分)

综上所述, t 的取值范围是 $(-1, \frac{1}{2})$. (3 分)

代入 $t = -1+d$ 可得 $-1 < -1+d < \frac{1}{2}$, 则 $0 < d < \frac{3}{2}$, 故 $D(-1) = \{d \in \mathbf{R} \mid 0 < d < \frac{3}{2}\}$. (4 分)

(2) 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $x > 0$ 时, $-x < 0$, $f(x) = -f(-x) = -2^{-x}$, $f(0) = 0$. (5 分)

$$\text{则 } f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -2^{-x}, & x > 0 \end{cases}.$$

当 $x < 0$ 时, $f(x) \in (0, 1)$, $d \in D(x)$, 等价于 $f(x+d) > f(x) > 0$, 则 $x+d < 0$, 且 $2^{x+d} > 2^x$, $d < -x$ 且 $d > 0$, 所以 $D(x) = (0, -x)$.

当 $x > 0$ 时, $f(x) \in (-1, 0)$, $d \in D(x)$, 等价于 $f(x+d) > -2^{-x}$.

若 $x+d < 0$, $f(x+d) > 0 > -2^{-x}$, 得 $d < -x$; 若 $x+d = 0$, $f(0) = 0 > -2^{-x}$, 得 $d = -x$;

若 $x+d > 0$, $f(x+d) = -2^{-(x+d)} > -2^{-x}$, 则 $-(x+d) < -x$, 得 $d > 0$.

所以 $D(x) = (-\infty, -x] \cup (0, +\infty)$. (7 分)

已知 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 且 $x_1 x_2 \neq 0$:

① 若 $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, $2^{x_1} \leq 2^{x_2}$, $x_1 \leq x_2 < 0$, $-x_1 \geq -x_2 > 0$, $D(x_1) = (0, -x_1)$, $D(x_2) = (0, -x_2)$. 因为 $(0, -x_2) \subseteq (0, -x_1)$, 所以 $D(x_1) \supseteq D(x_2)$.

② 若 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $-2^{-x_1} \leq -2^{-x_2}$, $-x_1 \geq -x_2$, $0 < x_1 \leq x_2$, $D(x_1) = (-\infty, -x_1] \cup (0, +\infty)$, $D(x_2) = (-\infty, -x_2] \cup (0, +\infty)$. 因为 $(0, -x_2] \subseteq (0, -x_1]$, 所以 $D(x_1) \supseteq D(x_2)$.

③若 $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $f(x_1) < 0 < f(x_2)$, 满足 $f(x_1) \leq f(x_2)$. $D(x_1) = (-\infty, -x_1] \cup (0, +\infty)$, $D(x_2) = (0, -x_2)$. 因为 $-x_2 > 0$, $(0, -x_2) \subseteq (0, +\infty) \subseteq D(x_1)$, 所以 $D(x_1) \supseteq D(x_2)$.

④若 $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $f(x_1) > 0 > f(x_2)$, 与 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 矛盾.

综上所述, $D(x_1) \supseteq D(x_2)$ 得证. (9 分)

(3) (i) 假设 $f(0) < 1$. 若 $f(0) \leq 0$, 取 $x_1 = -\frac{1}{2}$, $f(x_1) = 2^{-\frac{1}{2}} > 0$, $f(0) < f(x_1)$, 则 $D(0) \supseteq D(x_1)$. (10 分)

取 $d = \frac{1}{4}$, $x_1 + d = -\frac{1}{4} < 0$, $f(x_1 + d) = 2^{-\frac{1}{4}} > 2^{-\frac{1}{2}} = f(x_1)$, $d \in D(x)$.

因为 $D(0) \supseteq D(x_1)$, 所以 $d \in D(x_0)$, $f(d) > f(0)$. 又 $d = \frac{1}{4} \in (0, 1)$, 由②知 $f(d) < f(0)$, 矛盾. (11 分)

若 $0 < f(0) < 1$, 令 $x_0 = \log_2 f(0)$, 则 $x_0 < 0$, $f(x_0) = 2^{x_0} = f(0)$. $f(x_0) \leq f(0)$, 则 $D(x_0) \supseteq D(0)$. $f(0) \leq f(x_0)$, 则 $D(0) \supseteq D(x_0)$. 所以 $D(x_0) = D(0)$.

记 $x = \min\{a, b\}$ 为取 a , b 中的较小值, 取 $d_0 = \min\{-\frac{x_0}{2}, \frac{1}{2}\}$.

因为 $x_0 < 0$, 所以 $0 < d_0 \leq \frac{1}{2} < 1$. 由②知 $f(d) < f(0)$, 则 $d_0 \notin D(0)$.

又 $x_0 + d_0 \leq x_0 - \frac{x_0}{2} = \frac{x_0}{2} < 0$. $f(x_0 + d_0) = 2^{x_0 + d_0} > 2^{x_0} = f(x_0)$, 所以 $d_0 \in D(x_0)$, 与 $D(x_0) = D(0)$ 矛盾.

综上所述, 假设不成立. 所以 $f(0) \geq 1$. (13 分)

(ii) 若 $x \in (0, 1)$, 假设 $f(x) > 0$. 取 $c < 0$ 使得 $f(c) = 2^c < f(x)$.

由②知 $f(x) < f(0)$, $f[x + (-x)] = f(0) > f(x)$, 所以 $-x \in D(x)$.

由①知, $f(c) < f(x)$, 则 $D(c) \supseteq D(x)$, $-x \in D(x)$. $f[c + (-x)] = f(c - x) > f(c)$.

因为 $c < 0$, $x > 0$, 所以 $c - x < c < 0$. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^x$ 单调递增, 所以 $f(c - x) < f(c)$, 矛盾. 所以 $\forall x \in (0, 1)$, $f(x) \leq 0$. (14 分)

若 $x \geq 1$, 假设 $f(x) > 0$. 取 $b < 0$ 使得 $f(b) = 2^b < f(x)$.

$f[b + (x - b)] = f(x) > f(b)$, 则 $x - b \in D(b)$.

令 $b' = \frac{1}{2} - (x - b)$. 因为 $x \geq 1$, $b < 0$, 所以 $x - b > 1$, 则 $b' < -\frac{1}{2} < b < 0$. 所以

$$f(b')2^{b'} < 2^b = f(b).$$

由①知, $D(b') \supseteq D(b)$, 则 $x - b \in D(b')$. $f[b' + (x - b)] = f(\frac{1}{2}) > f(b') > 0$. 与 $\frac{1}{2} \in (0, 1)$,

$f(\frac{1}{2}) \leq 0$ 矛盾. 所以 $\forall x > 0$, $f(x) \leq 0$. (15 分)

取 $0 < x < y$, 因为 $y - x > 0$, 则 $-(y - x) - 1 < -1 < 0$, $f[-(y - x) - 1] = 2^{-(y-x)-1} > 0$.

又 $x > 0$, 则 $f(x) \leq 0$, 所以 $f(x) < f[-(y - x) - 1]$. 由①知, $D(x) \supseteq D[-(y - x) - 1]$.

因为 $-(y - x) - 1 < -1 < 0$, 所以 $f[-(y - x) - 1] < f(-1)$.

$f[-(y - x) - 1 + (y - x)] = f(1) > f[-(y - x) - 1]$, 所以 $y - x \in D(x)$. (16 分)

$f[x + (y - x)] > f(x)$, $f(y) > f(x)$. 所以 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 得证.

(17 分)